

Probabilité

Exercice 1

Une maladie touche une population de lapins avec une probabilité de 30% (soit $p = 0.3$). On choisit au hasard 5 lapins indépendamment les uns des autres. On note X le nombre de lapins malades parmi les 5.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer la probabilité qu'exactly 2 lapins soient malades.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 lapins soient malades.
4. Calculer la probabilité qu'aucun lapin ne soit malade.

1) Loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0.3$

$$P(X=k) = \binom{5}{k} 0.3^k \times 0.7^{5-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

2) $P(X=2) = \binom{5}{2} 0.3^2 \times 0.7^3 = \frac{3087}{10000}$

3) $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= \binom{5}{3} 0.3^3 \times 0.7^2 + \binom{5}{4} (0.3)^4 \times 0.7^1 + (0.3)^5$$

$$= 0.1323 + 0.02035 + 2.43 \times 10^{-3} =$$



$$4) P(X=0) = 0.3^5 =$$

Exercice 2

Une voiture possède 4 bougies d'allumage. Chaque bougie a 5% de chance d'être défectueuse lors de l'achat. On suppose que l'état de chaque bougie est indépendant des autres. On note X le nombre de bougies défectueuses parmi les 4.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer la probabilité qu'aucune bougie ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 bougie défectueuse.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 2 bougies défectueuses.

1) X suit la loi binomiale de paramètres

$n = 4$ et $p = 0.05$

$$P(X=k) = C_4^k 0.05^k \times 0.95^{4-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$2) P(X=0) = 0.95^4$$

$$3) P(X=1) = C_4^1 0.05^1 \times 0.95^3$$

$$4) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X=2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$



Exercice : Taux de réussite au lycée

Dans un lycée, le taux de réussite au baccalauréat est de 75%. On choisit 200 élèves au hasard parmi ceux qui passent l'examen. On note X le nombre d'élèves qui réussissent.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer le nombre moyen d'élèves réussissant le bac.
3. Calculer la probabilité qu'exactement 150 élèves réussissent.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 140 élèves réussissent.

1) Loi Binomiale de paramètre $200, 0.75$

Chaque élève réussit avec une probabilité de 75%. (200 élèves indépendants)

$$P(X=k) = \binom{200}{k} 0.75^k \times 0.25^{200-k}$$

$k \in \{0, 1, \dots, 200\}$

$$2) E(X) = 200 \times 0.75 = 150 \text{ élèves}$$

$$3) P(X=150) = \binom{200}{150} 0.75^{150} \times 0.25^{50}$$



$$4) P(X \geq 140) = \sum_{k=140}^{200} \binom{200}{k} 0.75^k \times 0.25^{200-k}$$

$$P(X=140) + P(X=141) + \dots + P(X=200)$$

$$P(X=140) = \binom{200}{140} 0.75^{140} \times 0.25^{60}$$

$$P(X=141) = \binom{200}{141} 0.75^{141} \times 0.25^{59}$$

Exercice : Vaches malades

Dans une ferme, chaque vache a 10% de chance d'être malade à cause d'une épidémie. On considère un troupeau de 500 vaches. On note X le nombre de vaches malades.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer le nombre moyen de vaches malades.
3. Calculer la probabilité qu'exactly 50 vaches soient malades.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 60 vaches soient malades.

1) Il ya 500 vaches (nombre fixe)

• Chaque vache peut être malade (0.1) (echec)
soit en bonne santé (0.9) (Succès)

• Les essais sont indépendants les uns des autres (la maladie d'une vache n'affecte pas les autres)

Loi Binomiale de paramètres 500 et 0.1

$$P(X=k) = \binom{500}{k} 0.1^k \times 0.9^{500-k} \quad \text{, } k \in \{0, 1, \dots, 500\}$$

$$2) E(X) = 500 \times 0.1 = 50 \quad | \quad V(X) = 500 \times 0.1 \times 0.9$$

$$3) P(X=50) = \binom{500}{50} \times 0.1^{50} \times 0.9^{450}$$

$$4) P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{59} \binom{500}{k} 0.1^k \times 0.9^{500-k}$$

Exercice : Durée de vie d'un téléphone avec la loi exponentielle

La durée de vie d'un téléphone suit une loi exponentielle avec un taux de défaillance de $\lambda = 0.2$ par an.

1. Calculer la probabilité qu'un téléphone dure plus de 3 ans avant de tomber en panne.
2. Calculer la probabilité qu'un téléphone dure entre 2 et 4 ans avant de tomber en panne.
3. Quelle est la durée de vie moyenne d'un téléphone ? Calculer l'espérance $E(T)$ et la variance $\text{Var}(T)$ de la durée de vie.

$$1) P(t \geq 3) = e^{-3\lambda} = e^{-3 \times 0.2} = e^{-0.6}$$



$$P(t \leq 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-0.6}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P(2 \leq t \leq 4) &= e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda} \\ &= e^{-0.2 \times 2} - e^{-4 \times 0.2} \approx \end{aligned}$$

$$3) \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ ans}$$

Exercice : Durée de vie de bougies d'une voiture

On considère qu'une voiture utilise 4 bougies d'allumage. La durée de vie des bougies suit une loi exponentielle. De plus, chaque bougie peut se détériorer selon un taux constant.

Loi Exponentielle :

La durée de vie de chaque bougie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$ par an. Cela signifie qu'en moyenne, une bougie dure 10 ans avant de se détériorer.

Loi Binomiale :

On suppose qu'à chaque année, chaque bougie a une probabilité $p = 0.05$ de se détériorer (c'est-à-dire de tomber en panne).

Questions

1. Calculer la probabilité qu'une bougie dure plus de 12 ans.
2. Calculer la probabilité qu'aucune bougie ne se détériore pendant une année donnée.
3. Calculer la probabilité qu'exactly 2 bougies sur 4 se détériorent pendant une année donnée.

$$2) \quad \begin{array}{c|cc} t & 0 & 12 & +\infty \\ \hline P & 1 & e^{-12\lambda} & 0 \end{array}$$

$$P(X \geq 12) = e^{-12\lambda} = e^{-12 \times 0.1} = e^{-1.2}$$



2) Loi Binomiale de paramètre $p = 0,05$

$$P(X=0) = 0,95^4$$

$$3) P(X=2) = \binom{4}{2} 0,05^2 \times 0,95^2$$

va donner une loi uniforme discrète pour cet exemple.

Exercice : Lancer de dés

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère une variable aléatoire X qui représente le nombre obtenu au lancer du dé.

1. Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 4.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair.

$$\begin{aligned} 2) \quad P(X=1) &= \frac{1}{6} & P(X=3) &= P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) \\ P(X=2) &= \frac{1}{6} & &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

i	1	2	3	4	5	6
$P(X=i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum u_i P(X=u_i)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5 \end{aligned}$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} - (3.5)^2$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12}$$

$$2) P(x \geq 4) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$3) P(x=1) + P(x=3) + P(x=5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

