

Probabilité

Une étude statistique montre que dans une ville donnée, 15 % des individus âgés de moins de 60 ans et 80 % des individus âgés de plus de 60 ans ont été vaccinés contre la grippe. Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30 % de la population de cette ville. On choisit, au hasard, une personne de cette population et on considère les événements suivants :

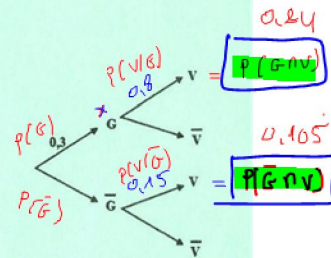
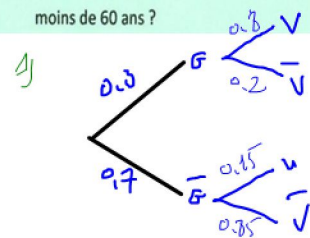
- G : "La personne est âgée de plus de 60 ans".
- V : "La personne est vaccinée".

1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2) Montrer que la probabilité pour qu'une personne soit

vaccinée est égale à 0,345. $P(V)$

3) La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans ?



$$P(V) = P(G \cap V) + P(\bar{G} \cap V)$$

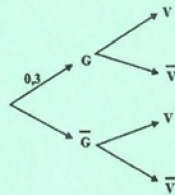
$$P(G \cap V) = P(V|G) \times P(G) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

$$P(\bar{G} \cap V) = P(V|\bar{G}) \times P(\bar{G}) = 0.15 \times 0.7 = 0.105$$

$$P(V) = P(G \cap V) + P(\bar{G} \cap V) = 0.24 + 0.105 = 0.345$$

Une étude statistique montre que dans une ville donnée, 15 % des individus âgés de moins de 60 ans et 80 % des individus âgés de plus de 60 ans ont été vaccinés contre la grippe. Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30 % de la population de cette ville. On choisit, au hasard, une personne de cette population et on considère les événements suivants :

- G : "La personne est âgée de plus de 60 ans".
- V : "La personne est vaccinée".



1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2) Montrer que la probabilité pour qu'une personne soit

vaccinée est égale à 0,345.

3) La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans ?

$$P(\bar{G}|V) = \frac{P(\bar{G} \cap V)}{P(V)} = \frac{0.105}{0.345} = \frac{7}{23}$$

Une usine fabrique des ampoules avec une probabilité de 10% qu'une ampoule soit défectueuse. On prélève 5 ampoules au hasard. Soit X le nombre d'ampoules défectueuses dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

0.1 (red minus) 0.9 (green plus)

$$P(X=0) = 0.9^5$$

$$P(X=1) = C_5^1 \times 0.1 \times 0.9^4$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times 0.1^2 \times 0.9^3$$

$$P(X=3) = C_5^3 \times 0.1^3 \times 0.9^2$$

$$P(X=4) = C_5^4 \times 0.1^4 \times 0.9$$

$$P(X=5) = C_5^5 \times 0.1^5$$

0.9 0.9 0.9 0.9 0.9 (all green plus signs)

0.9 0.9 0.9 0.1 0.1 (green plus, green plus, green plus, red minus, red minus)

0.9 0.9 0.1 0.1 0.1 (green plus, green plus, red minus, red minus, red minus)

0.9 0.1 0.1 0.1 0.1 (green plus, red minus, red minus, red minus, red minus)

0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 (all red minus signs)

0.9 0.9 0.9 0.1 0.1 (green plus, green plus, green plus, red minus, red minus)

$$P(X=4) = C_5^4 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^1$$

$$P(X=5) = 0,1^5$$

Un lot contient 4 calculatrices. Chaque calculatrice a une probabilité de 5% d'être défectueuse, indépendamment des autres. Soit X le nombre de calculatrices défectueuses dans ce lot.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

p 0,05	\bar{p} 0,95	
0	4	$P(X=0) = 0,95^4$
1	3	$P(X=1) = C_4^1 \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^3$
2	2	$P(X=2) = C_4^2 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^2$
3	1	$P(X=3) = C_4^3 \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^1$
4	0	$P(X=4) = C_4^4 \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^0$

Loi Binomiale

de paramètres $n \in 0,05$

$$P(X=k) = C_4^k \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{4-k}$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

On sélectionne 6 élèves dans une région où le taux de réussite au bac est de 60%.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 élèves réussissent ?

p
0,6
 \bar{p}
0,4

0
1
2
3
4
5
6

$$P(X=2) = C_6^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^4$$

3

4

$$P(X=5) = C_6^5 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^1$$

6

1) Loi Binomiale de paramètres

$n \in 0,6$

$$P(X=k) = C_6^k \cdot 0,6^k \cdot 0,4^{6-k}$$

$k \in \{0, \dots, 6\}$

$$P(X=3) = C_6^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^3$$

1) Loi Binomiale de paramètres
6 et 0,6

$$P(X=3) = \binom{6}{3} 0,6^3 \times 0,4^3$$

3

MA
AR
FR
A

Un élève passe un examen composé de 10 matières. Pour chaque matière, il a 70% de chances d'obtenir la moyenne. Soit X le nombre de matières où il obtient la moyenne.

1. Déterminer la loi suivie par X .
2. Calculer $P(X=10)$, la probabilité qu'il ait la moyenne dans toutes les matières.
3. Trouver $P(X \geq 8)$, la probabilité qu'il ait la moyenne dans au moins 8 matières.

	$\binom{10}{0}$	$\binom{10}{10}$	
	0,7	0,3	
	0	10	
10	1	9	$P(X=$
	2	8	
	\vdots		
	10	0	

1) Loi Binomiale de paramètres 10 et 0,7

$$P(X=k) = \binom{10}{k} 0,7^k \times 0,3^{10-k}$$

$$k \in \{0, \dots, 10\}$$

$$2) P(X=10) = 0,7^{10}$$

$$3) P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8} \times 0,7^8 \times 0,3^2 + \binom{10}{9} \times 0,7^9 \times 0,3^1 + \binom{10}{10} \times 0,7^{10} \times 0,3^0$$

Un entraîneur sélectionne un joueur pour tirer les penalties lors d'un match. Ce joueur a 60% de chances de réussir un penalty. Il tire 5 fois.

1. Quelle est la probabilité qu'il marque exactement 4 penalties ?
2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins 2 penalties ?

1) Loi Binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0.6$

$$P(X=4) = C_5^4 \times 0.6^4 \times 0.4^1$$

2) $P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

Résumé des résultats :

- $P(X = 0) \approx 0.01024$
- $P(X = 1) \approx 0.0768$
- $P(X = 2) \approx 0.2304$
- $P(X = 3) \approx 0.3456$
- $P(X = 4) \approx 0.2592$
- $P(X = 5) \approx 0.07776$

1. $P(X = 0)$ (aucun succès) :

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^5 = 1 \cdot 1 \cdot (0.4)^5 \approx 0.01024$$

2. $P(X = 1)$ (1 succès) :

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^4 = 5 \cdot 0.6 \cdot (0.4)^4 \approx 0.0768$$

3. $P(X = 2)$ (2 succès) :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^3 = 10 \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^3 \approx 0.2304$$

4. $P(X = 3)$ (3 succès) :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^2 = 10 \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^2 \approx 0.3456$$

5. $P(X = 4)$ (4 succès) :

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^1 = 5 \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4) \approx 0.2592$$

6. $P(X = 5)$ (5 succès) :

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot (0.6)^5 \cdot (0.4)^0 = 1 \cdot (0.6)^5 \cdot 1 \approx 0.07776$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

Voici les résultats exacts des probabilités pour la loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(3, 0.1)$, où :

- $n = 3$ (nombre d'essais),
- $p = 0.1$ (probabilité de succès).

1. $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0.729 = 0.729$$

2. $P(X = 1)$:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^2 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.81 = 0.243$$

3. $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^1 = 3 \cdot 0.01 \cdot 0.9 = 0.027$$

4. $P(X = 3)$:

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot (0.1)^3 \cdot (0.9)^0 = 1 \cdot 0.001 \cdot 1 = 0.001$$

$$P(X \geq 1) = 0.243 + 0.027 + 0.001 = 0.271$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - 0.729 = 0.271$$

Exercice 1 : Durée de vie d'une ampoule

La durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle avec un paramètre $\lambda = 0.001$ (par heure).

1. Quelle est la moyenne de la durée de vie de l'ampoule ?

2. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 1200 heures ?

$$\rightarrow P(t \geq 1200) = e^{-1200\lambda}$$

3. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure moins de 800 heures ?

$$= e^{-1200 \times 0.001} \approx 0.3$$

t	0	800	1200	∞
P	1	$e^{-800\lambda}$	$e^{-1200\lambda}$	0

$$3) P(t \leq 800) = 1 - e^{-800\lambda} = 1 - e^{-800 \times 0.001} \approx$$

4) Durée de vie moyenne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.001} = 1000 \text{ h}$$

Exercice 2 : Durée de vie d'un véhicule

La durée de vie d'un véhicule suit une loi exponentielle avec un paramètre $\lambda = 0.02$ (par mois).

1. Calculer la moyenne de la durée de vie du véhicule.
2. Quelle est la probabilité qu'un véhicule tombe en panne avant 50 mois ?
3. Quelle est la probabilité qu'un véhicule fonctionne plus de 150 mois ?

$$1) \quad \bar{x} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.02} = 50$$

$$2) \quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & 50 & 150 & +\infty \\ \hline p & 1 & e^{-50\lambda} & e^{-150\lambda} & 0 \end{array}$$

$$2) \quad p(T < 50) = 1 - e^{-50\lambda} \\ = 1 - e^{-50 \times 0.02} \approx 0.63$$

$$3) \quad p(T > 150) = e^{-150\lambda} \\ = e^{-150 \times 0.02} \approx 0.05$$

