

Functions to gain time

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f^2)' = 2f'f$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x + \ln x \quad x \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = x' \ln x + x \ln' x$$

$$= 1 \ln x + x \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1$$

$$f(x) = (1 - \ln x)^2$$

$$f'(x) = 2(1 - \ln x)'(1 - \ln x)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)$$

$$= -\frac{2}{x}(1 - \ln x)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f^2)' = 2f'f$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x(1 - \ln x)$$

$$f'(x) = x'(1 - \ln x) + x(1 - \ln x)'$$

$$= 1(1 - \ln x) + x\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \ln x - 1$$

$$= -\ln x$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f^2)' = 2f'f$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^{\ln^2 x}$$

$$g(x) = x \quad \left| \quad f(x) = \ln^2 x \right.$$

$$g'(x) = 1 \quad \left| \quad f'(x) = 2 \frac{1}{x} \ln x \right.$$

$$f'(x) = 1 \ln^2 x + x \cdot 2 \frac{1}{x} \ln x$$

$$= \ln^2 x + 2 \ln x$$

$$f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - x$$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$(f^2)' = 2f'f$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \rightarrow 1$$

$$f = x \ln x \quad \left\{ \begin{array}{l} g = x+1 \\ g' = 1 \end{array} \right.$$

$$f' = 1 \ln x + x \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 \ln x + x \frac{1}{x})(x+1) - 1x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x \ln x + \ln x + 1 + x - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\ln x + 1 + x}{(x+1)^2}$$

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

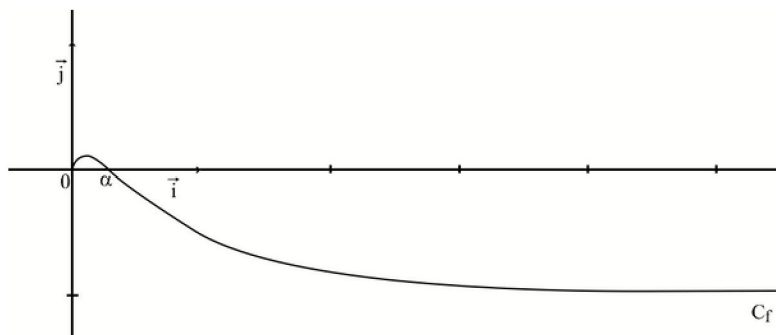
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	-
f	$+\infty$	0	$-\infty$

Dans l'annexe ci-jointe (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = -\frac{x^2 + x \ln x + x}{(x+1)^2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.



1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b/ Montrer que $\ln \alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} + 1$

et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de g .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	-

x	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
g	$g(\alpha)$	$+\infty$

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

d) Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C} .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln x - x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln x + \frac{1}{x} \right) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x + 1}{x} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\ln x - x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[2 \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$$

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

d) Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C} .

B.P. de direction celle
de la droite d'éq $y = ax$
au V.G. ad

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x - x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\ln x - x + \frac{1}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x + \frac{1}{x} = +\infty$$

\mathcal{C} admet au v. (+∞) une B.P. de direction celle de la
droite d'éq $y = -x$

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

d) Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C} .

$$2) a) \quad x \in]0, +\infty[$$

$$f(1) = 2\ln 1 - 1 + \frac{1}{1}$$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 -	
f	$+\infty$		$-\infty$

$$c) \quad f(1) = 2\ln 1 - 1 + \frac{1}{1} = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 -	
f	$+\infty$		$-\infty$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		+ 0 -	

$I(1, 0)$ pt d'inflexion

$f'(x)$ s'annule en 1 et
ne change pas de signe
 $\Rightarrow I(1, 0)$ pt d'inflexion
de \mathcal{C}

