Définition

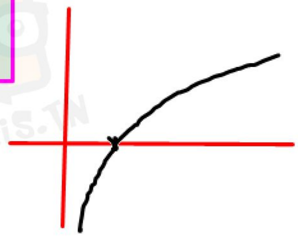
primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

x	0		1	$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$



$a > 0 \ . \ b > 0$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln a^n = n \ln a \quad (n \geq 1 \text{ entier})$

$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (2)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (3)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (4)

Application

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln x - 1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{x} - \underset{+\infty}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{x}[1 - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 [1 - 2\frac{\ln x}{x}] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (2)

Tech prin 2024

$f(x) = (\ln x - 1)^2 \;,\; x \in]0,+\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$. Interpréter graphiquement

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ (3)

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$ (4)

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\underbrace{\ln x}_{-\infty} - 1)^2 = +\infty$ (la droite d'éq $x = 0$ Asy à $\mathcal{C}_f$)

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\ln x - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x - 2\ln x + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\}$ $\mathcal{C}_f$ admet au $V(+\infty)$ une Branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (2)

Tech 2023

A) $g(x) = \overset{+\infty}{x^2} + 2 - \ln x \;,\; x \in]0,+\infty[$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ puis montrer $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$

$\bullet \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + 2 - \ln x = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\Big[\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\frac{2}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\Big] = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ (3)

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$ (4)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (2)

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ (3)

$\bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$ (4)

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interprétation

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et mq $\Delta : y = x$ Asy à C_f au $V(+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{-1} + \overbrace{\ln x}^{-\infty}}{x} = \cancel{\frac{-\infty}{0^+}} = -\infty$$

La droite d'éq $x = 0$ Asy à C_f

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

mq $\Delta : y = x$ Asy à C_f au $V(+\infty)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - y = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2 - 1 + \ln x}{x} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\cancel{x} - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \cancel{- x}\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow \Delta : y = x$ Asymptote à C_f au $V(+\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (2)

1) Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a/ Calculer $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (3)
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$ (4)

$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x} = -\infty$

La droite d'éq $x=0$ Asy à $\mathscr{C}$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0} + \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{0} = 0$

La droite d' $y=0$ Asy à $\mathscr{C}_f$ au $V(+\infty)$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ ($\Delta: x=0$ Asy à $\mathscr{C}_f$)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ ($\Delta: y=a$ Asy à $\mathscr{C}_f$ au $V(+\infty)$)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ → 0 BP $(O\vec{i})$; → ∞ BP $(O\vec{j})$
- mq $\Delta: y=ax+b$ Asy
$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \dots = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (2)

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (3)
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$ (4)

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}+1$ et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+1}+1 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}+1$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+1 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\cancel{x}\ln x}{x+1}+1}{\cancel{x}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} + \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(1+\frac{1}{x})} + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to 1$; $\frac{\ln x}{x} \to 0$; $\frac{1}{x} \to 0$

$\mathcal{C}_g$ admet au $V(+\infty)$ une B P de direction $(O\vec{i})$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0 \quad (2)$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad (3)$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0 \quad (4)$$

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

1) a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x = -\infty$

La droite d'éq $x=0$ Asy à $\mathcal{C}_f$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\boxed{\frac{1}{2}x^2}+\boxed{\frac{1}{2}}+\boxed{\ln x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \mathcal{C}_f \text{ admet au } V(+\infty) \text{ une B P de direction } (O\vec{j})$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x = -\infty$

la droite d'éq $x = 0$ est une asymptote à C_f.

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x = +\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\ln x}}{x} = +\infty$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$

C_f admet une branche parabolique de direction $(O\vec{j})$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$(f \quad g)'$

$f(x) = x \ln x \qquad (fg)' = f'g + fg'$

$f'(x) = 1 \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)' x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2}$$