

Soit un réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - (1 + 2e^{i\theta})z + e^{2i\theta} + ie^{i\theta} = 0$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère

les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et $z_C = e^{i\theta}$.

a) Vérifier que $\frac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = ie^{i\theta}$.

$$S = \{e^{i\theta}; 1 + e^{i\theta}\}$$

$$1) z^2 - (1 + 2e^{i\theta})z + e^{2i\theta} + ie^{i\theta} = 0$$

$$a = 1, b = -(1 + 2e^{i\theta}) \text{ et } c = e^{2i\theta} + ie^{i\theta}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1 + 2e^{i\theta})^2 - 4(e^{2i\theta} + ie^{i\theta})$$

$$= 1 + 4e^{i\theta} - 4e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta}$$

$$= -1 + 4e^{i\theta} - 8e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta}$$

$$= -1 + 4e^{i\theta} - 4ie^{i\theta}$$

$$= -1 + 4e^{i\theta}$$

$$z = \frac{1 + 2e^{i\theta} \pm \sqrt{-1 + 4e^{i\theta}}}{2}$$

$$z = \frac{1 + 2e^{i\theta} \pm \sqrt{-1 + 4e^{i\theta}}}{2} = \frac{1 + 2e^{i\theta} \pm \sqrt{-1 + 4e^{i\theta}}}{2}$$

a) Vérifier que $(2\sqrt{3} - 2i)^2 = 8 - 8i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})z + 4(-1 + i\sqrt{3}) = 0$.

$$a) (2\sqrt{3} - 2i)^2 = 12 - 8i\sqrt{3} - 4 = 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$b) a = 1, b = -2(1 + i\sqrt{3}), c = 4(-1 + i\sqrt{3})$$

$$\Delta = 4(1 + i\sqrt{3})^2 - 16(-1 + i\sqrt{3})$$

$$= 4(1 + 2i\sqrt{3} - 3) + 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= 4(-2 + 2i\sqrt{3}) + 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= -8 + 8i\sqrt{3} + 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$S = \{2\sqrt{3} - 2i, 2 + 2i\sqrt{3}\}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points F, G et I d'affixes respectives :

$$z_F = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i, z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_I = -\frac{1}{2} + i.$$

1) a) Vérifier que $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) Montrer que F et G appartiennent au cercle (ζ) de centre I et de rayon 1.

c) Vérifier que $z_F - z_I = i(z_G - z_I)$. En déduire que le triangle IFG est rectangle en I.



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points F, G et I d'affixes respectives :

$$z_F = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i, z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z_I = -\frac{1}{2} + i.$$

1) a) Vérifier que $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) Montrer que F et G appartiennent au cercle (ζ) de centre I et de rayon 1.

c) Vérifier que $z_F - z_I = i(z_G - z_I)$. En déduire que le triangle IFG est rectangle en I.

$$c) i(z_G - z_I) = i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$$

$$= i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = z_F - z_I$$

$$z = \frac{2(1 + i\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 2i)}{2}$$

$$= \frac{2 + 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i}{2}$$

$$= 1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i$$

$$= 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$z = \frac{2 + 2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2i}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$$

$$S = \{z\}$$

4) a)

$$z_F - z_I = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i + \frac{1}{2} - i$$

$$= (1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1)i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - i$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$IF = |z_F - z_I| = |\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$IF = 1 \Rightarrow F \in \mathcal{C}_{(I, 1)}$$

$$IG = |z_G - z_I| = |\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$\Rightarrow IG = 1 \Rightarrow G \in \mathcal{C}_{(I, 1)}$$

$$z_F - z_I = i(z_G - z_I)$$

$$\Rightarrow \frac{z_F - z_I}{z_G - z_I} = i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{IF}}{\vec{IG}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \vec{IF} \perp \vec{IG}$$

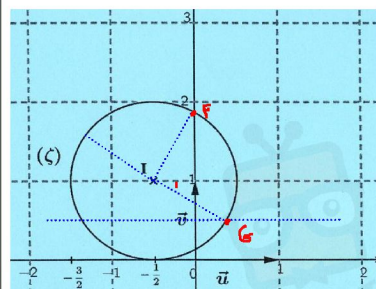
donc IFG est un triangle rectangle

en I



Dans la figure 1 de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) .

Construire les points F et G.



$$z_F = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, \quad z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\operatorname{Re}(z_F) = 0 \Rightarrow F \in (O\vec{y})$$

$$\operatorname{Im}(z_F) = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

$$F \in \mathcal{C}$$

$$\operatorname{Im}(z_G) = \frac{1}{2}$$

$$G \in \text{à la droite d'éq } y = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Re}(z_G) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$$

$$z_F = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, \quad z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

4) Soient K et L les points d'affixes respectives : $z_K = -\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$.

a) Montrer que $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. En déduire que $(FK) \perp (FI)$.

b) Construire K et L.

$$z_I = -\frac{1}{2} + i$$

$$z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = \frac{-\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3}) - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} + i + i\sqrt{3} - i - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} + i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}} = i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{FK}}{z_{FI}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{FK} \perp \overrightarrow{FI}$$

$$\text{donc } (FK) \perp (FI)$$

4) Soient K et L les points d'affixes respectives : $z_K = -\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$.

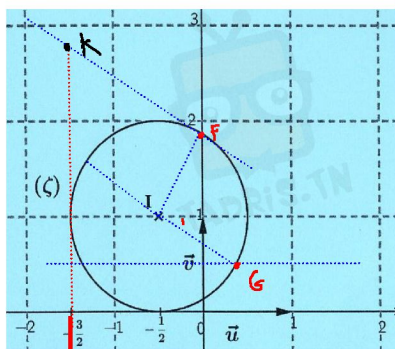
a) Montrer que $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. En déduire que $(FK) \perp (FI)$.

b) Construire K et L.

• $(FK) \perp (FI) \Rightarrow K$ est un pt de la droite passant par F et perpendiculaire à (FI)

$$\operatorname{Re}(z_K) = -\frac{3}{2} \Rightarrow K \text{ appartient à la droite d'éq } x = -\frac{3}{2}$$

$$\cdot z_L = \overline{z_K} = -\frac{3}{2} - i(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow L = \underset{(O\vec{w})}{S}(K)$$



$$z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_K = -\frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3}) \text{ et } z_L = \overline{z_K}.$$

c) Vérifier que $z_G - z_L = (2+\sqrt{3})(z_F - z_I)$. En déduire que (GL) // (FI).

d) Les droites (FK) et (GL) se coupent en un point D.

Montrer que le cercle (ζ) est inscrit dans le triangle DKL.

$$c) \frac{z_G - z_L}{z_F - z_I} = 2 + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{LG}}{\overrightarrow{IF}} \in \mathbb{R} \Rightarrow [LG] // [IF] \\ \Rightarrow (GL) // (FI)$$

$$c) z_G - z_L = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{3}{2} - i(1+\sqrt{3})\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{2} + i\left(1+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) \quad \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{2} + i \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{2}i = (\sqrt{3}+2)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ = (\sqrt{3}+2)(z_F - z_I)$$

1. On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 3(\sqrt{3}+i)z + 4(1+i\sqrt{3}) = 0$.

a) Vérifier que $(\sqrt{3}+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$.

b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les

points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1+i)z_A$.

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.

a) Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.

b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.

$$a) \text{ Vérifier que } \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i.$$

b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\left| \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i| \Rightarrow \frac{|z_D - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{AB} = 1 \Rightarrow AD = AB$$

Donc BAD est un triangle rectangle et isocèle en A.



$$1) (\sqrt{3}+i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$b) a = 1 \quad b = -3(\sqrt{3}+i) \quad c = 4(1+i\sqrt{3})$$

$$\Delta = 9(\sqrt{3}+i)^2 - 16(1+i\sqrt{3})$$

$$= 9(2+2i\sqrt{3}) - 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= 18 + 18i\sqrt{3} - 16 - 16i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3}+i)^2$$

$$z = \frac{3(\sqrt{3}+i) - (\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{2} = \sqrt{3}+i$$

$$z = \frac{3(\sqrt{3}+i) + (\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{4(\sqrt{3}+i)}{2} = 2(\sqrt{3}+i)$$

$$2) \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+i)z_A - z_A}{2z_A - z_A} = \frac{z_A + iz_A - z_A}{z_A} = \frac{iz_A}{z_A} = i$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) , on considère les

points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1+i)z_A$.

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.

a) Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.

b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.

c) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

d) Donner alors l'écriture de z_D sous forme exponentielle.

e) Construire le point D.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + i &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 1 + i\sqrt{3} &= 2 e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}i &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \\ \sqrt{3} - i &= 2 e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_A &= \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_D &= (1+i)z_A \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} \\ &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) , on considère les

points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1+i)z_A$.

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.

a) Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.

b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.

c) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

d) Donner alors l'écriture de z_D sous forme exponentielle.

e) Construire le point D.

