Mathématiques		Devoir de Contôle n°2	
Lycée Pilote Monastir			
		Durée : 45 minutes	Prof : Chortani Atef

Exercice 1 (5 points)

1) Soit $a = \sqrt{50} - \sqrt{8}(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{32}$

a) Montrer que $a = 3\sqrt{2} - 4$

b) Comparer $3\sqrt{2}$ et 4

c)En déduire le signe de a

2) Soit $x = \dfrac{5}{\sqrt{2}+1}$ et $y = 2\sqrt{2} - 1$

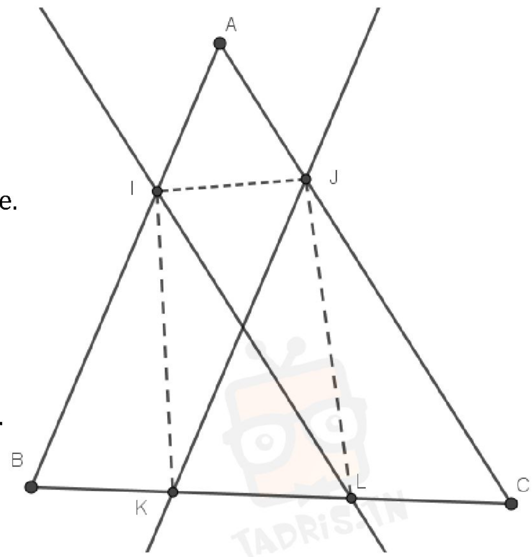
a) Montrer que $x - y = a$

b) Comparer alors x et y.

Exercice 2 (8 points)

On considère I le point de [AB] vérifiant AI $= \frac{1}{3}$AB et J le point de [AC] vérifiant AJ $= \frac{1}{3}$AC

1) Montrer que (IJ) parallèle à (BC).
2) La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en K.
La parallèle à (AC) passant par I coupe (BC) en L.
a) Calculer $\frac{BL}{BC}$ et $\frac{CK}{CB}$.
b) En déduire BK =KL=LC
3) Montrer que le quadrilatère KLJI est un parallélogramme.
4) Les droites (IL) et (JK) se coupent en G
La droite (AG) coupe (IJ) en P et (BC) en Q
a) Montrer que Q est milieu du segment [KL]
b) En déduire que Q est milieu du segment [BC]
c) Évaluer le rapport $\frac{AG}{AQ}$
d) Que représente le point G pour le triangle ABC ? Justifier



Exercice 3 (7 points)

Les questions 1,2, 3 et 4 sont indépendants
1) Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

A= $\{x \in IR; -1 \leq x < 7\}$ et B=$\{x \in IR; |x - 2| < 4\}$

2) Soit $n \in$ IN. Comparer $\sqrt{n^2 + 4n + 3}$ et $(n + 2)$

3)a) Montrer que pour tout n ∈ IN*; $\dfrac{4}{n+3} < \dfrac{1}{n+3} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} < \dfrac{4}{n}$

b) En déduire $0{,}0039 < \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} < 0{,}004$

4) a , b et c des réels strictement positifs

a) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) En déduire que $(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$

c) Montrer alors que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$

Exercice 1 (5 points)

On donne : $a = 2 + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$ et $b = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

1)a) Vérifier $a = 2 - \sqrt{3}$

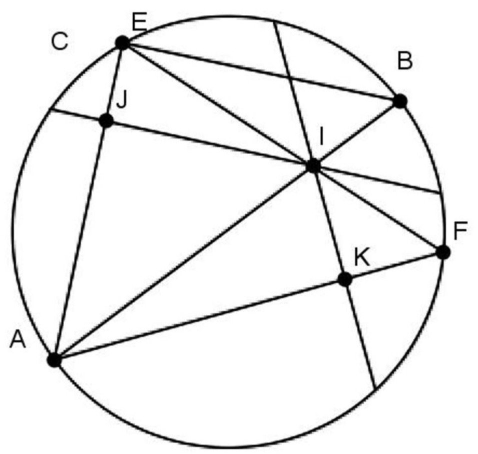
b) Vérifier que a et b sont inverses

c)Montrer que $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \in IN$

2)a) Calculer a^2 et b^2

b) Simplifier alors $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

Exercice 2 (8 points)



Soit C un cercle de diamètre AB= 4 ; I un point de [AB] tel que AI = 3 et E un point de C tel que AE = 3

1) La perpendiculaire à (AE) passant par I coupe (AE) en J

a)Montrer que le triangle AEB est rectangle en E

b)En déduire que (IJ) // (EB)

c)Calculer AJ

2) La droite (EI) recoupe le cercle en F.

La perpendiculaire à (AF) passant par I coupe (AF) en K.

a) Montrer que le triangle ABF est rectangle en F

b) En déduire que (IK) // (BF) .

3) a)Comparer $\frac{AJ}{AE}$ et $\frac{AK}{AF}$

b) En déduire que (EF) // (JK)

c)Montrer que $\widehat{JIA} = \widehat{EFA}$

Exercice 3 (7 points)

Les questions 1,2 ,3 et 4 sont indépendants

1) Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

A= $\{x \in IR; 1 < x \leq 4\}$ et B=$\{x \in IR; 2x < 4\}$

2)Soit a un nombre réel tel que $|a| < \frac{1}{2}$ on pose $A = \frac{1}{\sqrt{1+a}} - \left(1 - \frac{a}{2}\right)$

a)Montrer que $A = \dfrac{\sqrt{1+a} - \left(1 + \frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{2}}{1+a}$

b)Montrer que $\sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$ et en déduire que $A \leq a^2$

3) Soit $n \in$ IN. Comparer $\sqrt{n^2 + 2n + 3}$ et $(n+1)$

4) a , b et c trois réels

a) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Montrer que $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$

1) Soit $a=\sqrt{50}-\sqrt{8}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{32}$

a) Montrer que $a=3\sqrt{2}-4$

b) Comparer $3\sqrt{2}$ et 4

c) En déduire le signe de a

2) Soit $x=\dfrac{5}{\sqrt{2}+1}$ et $y=2\sqrt{2}-1$

a) Montrer que $x-y=a$

b) Comparer alors x et y.

1) a)

$a=\sqrt{50}-\sqrt{8}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{32}$

$=\sqrt{25}\sqrt{2}-\sqrt{4}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{16}\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-4\sqrt{2}$

$=\boxed{5\sqrt{2}}-4\boxed{+2\sqrt{2}}\boxed{-4\sqrt{2}}$

$=3\sqrt{2}-4$

b) $(3\sqrt{2})^2=9\times2=18$; $4^2=16$; $18>16\Rightarrow 3\sqrt{2}>4$

$4>0$ et $3\sqrt{2}>0$

b)

$3\sqrt{2}>4\Rightarrow a=3\sqrt{2}-4>0$

2)

a) $x-y=\boxed{\dfrac{5}{\sqrt{2}+1}}-(2\sqrt{2}-1)$

$=\dfrac{5(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-(2\sqrt{2}-1)$

$=\dfrac{5\sqrt{2}-5}{2-1}-2\sqrt{2}+1$

$=5\sqrt{2}-5-2\sqrt{2}+1=3\sqrt{2}-4=a$

b) $x-y=a>0\Rightarrow x>y$

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}^2-1^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

On donne : $a = 2 + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$ et $b = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$b = 2+\sqrt{3}$

1)a) Vérifier $a = 2 - \sqrt{3}$

b) Vérifier que a et b sont inverses

c)Montrer que $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \in IN$

2)a) Calculer a^2 et b^2

b) Simplifier alors $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

1)a)

$a = 2 + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$

$= 2 + \sqrt{25}\times\sqrt{3} - 4\sqrt{16}\times\sqrt{3} + 5\sqrt{4}\sqrt{3}$

$= 2 + 5\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$

$= 2 - \sqrt{3}$

b)

$b = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$= 2 + \sqrt{3}$

$a\,b = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$= 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$

c) a et b sont inverses

$\frac{1}{a} = b$ et $\frac{1}{b} = a$

$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 2\times\frac{1}{a} + 2\times\frac{1}{b}$

$= 2b + 2a$

$= 2(b + a)$

$= 2\left[2 + \cancel{\sqrt{3}} + 2 - \cancel{\sqrt{3}}\right]$

$= 2\times 4 = 8$

On donne : $a = 2 + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$ et $b = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

1)a) Vérifier $a = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad b = 2 + \sqrt{3}$

b) Vérifier que a et b sont inverses

c)Montrer que $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \in IN$

2)a) Calculer a^2 et b^2

b) Simplifier alors $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

$$a^2 = (2 - \sqrt{3})^2$$
$$= \boxed{2^2 - 2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2}$$
$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3$$
$$= 7 - 4\sqrt{3}$$

$$b^2 = (2 + \sqrt{3})^2$$
$$= 7 + 4\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2}$$
$$= |b| - |a| = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})$$
$$= 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

On donne : $a = 2 + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$ et $b = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

1)a) Vérifier $a = 2 - \sqrt{3}$

b) Vérifier que a et b sont inverses

c)Montrer que $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \in IN$

2)a) Calculer a^2 et b^2

b) Simplifier alors $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$$
$$= |2 + \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}|$$
$$= 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} > \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} > 0$

2) a) $x < y \Leftrightarrow x-y<0$

$x > y \Leftrightarrow x-y>0$

$$A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

1) verifier que $A>0$

2) a) calculer A^2

b) En deduire que $A = 2\sqrt{3}$

$A^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$

$= \sqrt{7+4\sqrt{3}}^2 + \sqrt{7-4\sqrt{3}}^2 - 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$= 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2\sqrt{7^2-(4\sqrt{3})^2}$

$= 14 - 2\sqrt{\underbrace{49-48}_{1}}$

$= 14-2 = 12$

b) $\left.\begin{matrix} A^2 = 12 \\ A>0 \end{matrix}\right\} A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Soit $n \in IN$. Comparer $\sqrt{n^2+4n+3}$ et $(n+2)$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x}^2 = x$

$n \in \mathbb{N}$

$\left.\begin{matrix} \sqrt{n^2+4n+3}^2 = n^2+4n+3 \\ (n+2)^2 = n^2+4n+4 \end{matrix}\right\}$ d'ou $n+2 > \sqrt{n^2+4n+3}$

$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$

$\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}\times\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}$

$B=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{11}{10}$

$=\frac{11}{2}$

$S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$

$=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

$S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{99}\right)$